

Schemat obliczania całek postaci $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx$

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx$$

Sprawdzamy czy:
 $mx+n = k(ax^2+bx+c)' =$
 $= k(2ax+b)$

Tak

Nie

Całkujemy przez podstawienie: $ax^2+bx+c=t$:
 $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx = k \int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx = \left| \frac{ax^2+bx+c=t}{(2ax+b)dx=dt} \right| = \dots$

Obliczamy Δ mianownika

$\Delta < 0$

$\Delta > 0$

$\Delta = 0$

$m = 0$

$m \neq 0$

Przydatne wzory:

(1) $\int \frac{dx}{x+k} = \ln|x+k| + C,$

(2) $\int \frac{dx}{x^2+k} = \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{k}} + C.$

1) Wyznaczamy pierwiastki x_1, x_2 mianownika i zapisujemy:
 $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2),$
 2) Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:
 $\frac{mx+n}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2},$
 3) Do każdej z otrzymanych całek stosujemy wzór (1).

Wyznaczamy pierwiastek x_0 mianownika i zapisujemy:
 $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$

1) Mianownik zapisujemy w postaci kanonicznej:
 $ax^2+bx+c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right],$
 2) Wykonujemy podstawienie:
 $x + \frac{b}{2a} = t$
 3) Otrzymaną całkę obliczamy ze wzoru (2)

1) Licznik przekształcamy do postaci:
 $mx+n = \alpha(2ax+b) + \beta,$
 2) Wyjściową całkę rozbijamy na sumę dwóch całek:
 $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{\alpha(2ax+b) + \beta}{ax^2+bx+c} dx =$
 $= \alpha \int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx + \beta \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$
 3) Dwie otrzymane całki obliczamy według zasad podanych wcześniej:

Całkujemy przez podstawienie:
 $\int \frac{n}{a(x-x_0)^2} dx = \left| \frac{x-x_0=t}{dx=dt} \right| = \dots$

1) Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:
 $\frac{mx+n}{a(x-x_0)^2} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2},$
 2) Pierwszą z otrzymanych całek obliczamy ze wzoru (1), a drugą przez podstawienie: $x-x_0=t.$

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \dots$$

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx = \dots$$